双曲3次元多様体の invariant trace fields と commensurably amphicheiralities

吉田 はん*

(2008 年 11 月 28 日受理)

1 序章

この論文では特に断らない限り，向き付け可能有限体積完備双曲 3 次元多様体のみを扱う . 特に非コンパクト有限体積完備 3 次元双曲多様体をカスプ付双曲 3 次元多様体という . 3 次元双曲多様体 M から invariant trace field $k(M)$ という $\mathbb{Q}$ 上有限次拡大体が定義される . これは有限被覆をとっても変わらないなど様々な有用な性質がある . 特に多様体の commensurably amphicheirality すなわち有限被覆をとれば向きを変える自己同相写像を持つかという性質との関係について W. Newman と A. Reid は [2] の中で以下のことを示している .

定理 1.1. *M が向き付け可能な双曲 3次元多様体で commensurably amphicheiral ならば $k(M) = \overline{k(M)}$ となる .* ここで $\overline{k(M)}$ は $k(M)$ 複素共役を表している .

この論文では上記の定理の逆が成立しないような例が無限個構成できることを示す .

主結果 1. *$k(M) = \overline{k(M)}$ であるが M は commensurably amphicheirality でない無限個の commensurability 類がある .*

2 定義と例

2.1 定義

クライン群 Γ に対して $k(\Gamma) = \mathbb{Q}(tr\gamma^2 | \gamma \in \Gamma)$ を Γ の invariant trace field という . $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ のとき , Γ の invariant trace field を M の invariant trace field と言い , $k(M)$ とかく .

S^3 内の絡み目で補空間がカスプ付 3 次元双曲多様体となるものを双曲絡み目と言う . $L_i(i = 1,2)$ を 図 1 のような双曲絡み目とする . この 2 つの絡み目から得られる 図 のような絡み目を L_0 をとする . すなわち , $S^3\backslash L_i(i = 1,2)$ の 3 点穴あき球面に沿って切り開き , 各々のコピーに沿って張り合わせて得られたものが $S^3\backslash L_0$ となる . このとき L_0 は L_1 と L_2 を belted sum して得られると言う . C. Adams は以下のような定理を証明している . [1]

定理 2.1. *$L_i(i = 1,2)$ を 図 1 のような双曲絡み目とする . このとき L_1 と L_2 を belted sum して得られた絡み目 L_0 も双曲絡み目となる .*

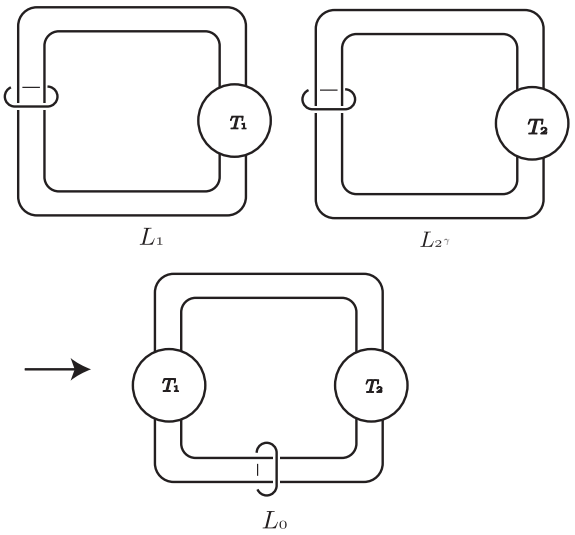

図 1 belted sum

D.Newman と A. Reid [3] の結果を用いると , belted sum と invariant trace field との関係で次のことが言える .

定理 2.2. *$L_i(i = 0,1,2)$ を定理 2.1 のような絡み目とする . このとき ,*

$$k(S^3\backslash L_0) = k(S^3\backslash L_1)k(S^3\backslash L_2)$$

となる .

カスプ付 3 次元双曲多様体 $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ のカスプ C に対応する Γ の部分群を $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ とし , 必要ならば共

*一般教科　自然

役をとることで，∞ を固定すると仮定する．このとき $a, b \in \mathbb{C}(\mathrm{Im}\frac{a}{b} > 0)$ が存在して $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とかける．$\frac{a}{b}$ をカスプ C の カスプパラメーター と言う．これは生成元 γ_1, γ_2 の取り方によらず，up to $PSL_2(\mathbb{Z})$ で一意的に決まる．すなわち，$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = \langle \gamma_1', \gamma_2' \rangle$ で $\gamma_1' = \begin{pmatrix} 1 & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\gamma_2' = \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Im\frac{a'}{b'} > 0$ のとき，$z = \frac{a}{b}$, $z' = \frac{a'}{b'}$ とおくと，ある $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{Z})$ が存在して，$z' = \frac{pz+q}{rz+s}$ とかける．

向きを変える自己同相写像でカスプパラメーターは z から $-\bar{z}$ に変わり，有限被覆を取るとカスプパラメーターは $tz(t \in \mathbb{Q})$ になるので次のことが言える．

定理 2.3. *M を commensurably amphicheiral なカスプ付き 3次元双曲多様体とする．M のカスプパラメーターを $z_1, \cdots, z_n$ とすると，*

$$\{z_1, \cdots, z_n\} = \{-\overline{z_1}, \cdots, -\overline{z_n}\}$$

(up to $PGL_2(\mathbb{Q})$)

2.2 例

例 1．図 2 のような絡み目を L とする．面角が

$$\alpha = \arccos\frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sqrt{2}} = \arccos\frac{1+\sqrt{5}}{4\sqrt{2}},\ \beta = \pi - 2\alpha \quad (1)$$

である頂点が理想境界上にある正 5 角柱を重ねた理想的多面体を P とする．P の矢印が合うように面どうしを貼り合わせると絡み目 L の補空間となることが W. P. Thurston [4] によって示されている．図 3 の F_1 と F_1' が同一視されて図 2 の 3 点穴あき球面 S_1 に対応する．図 3 のように ∂S_1 に対応するカスプを C_1, C_2, C_3 とおく．C_1 は頂点 v_1, v_2, v_3 に対応するので C_1 の horospherical 近傍は図のような平行四辺形の辺と辺を張り合わせて出来るトーラスとなる．同様に C_2, C_3 の horospherical 近傍も図のような平行四辺形の辺と辺を張り合わせて出来るトーラスとなる．よって C_1, C_2, C_3 のカスプパラメーターは図 4 より，

$$\begin{aligned} \frac{-\cos\beta + i\sin\beta}{2} &= -\frac{1}{2}e^{-i\beta} \\ &= -\frac{1}{2}(\cos\beta - i\sin\beta) \\ (1)\text{ より} &= -\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) \\ &= -\frac{1}{2}(2\cos^2\alpha - 1 + 2i\sin\alpha\cos\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8} + \frac{i\sqrt{34+10\sqrt{5}}}{8}) \end{aligned} \quad (2)$$

となる．

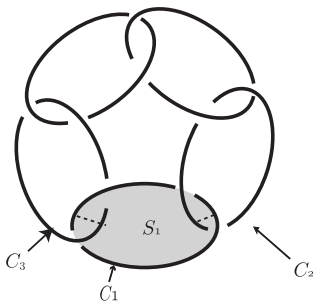

図 2 絡み目 L

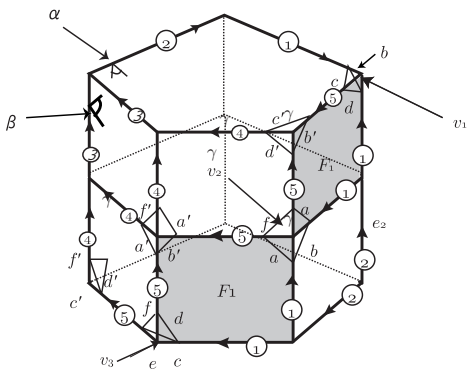

図 3 $S^3\backslash L$ の理想的多面体分割

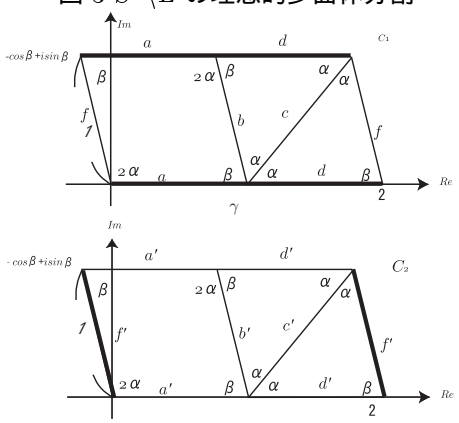

図 4 $S^3\backslash L$ のカスプパラメーター

注意：3 点穴あき球面 S_1 はカスプ C_1 の horospherical 近傍上では図のように a, d に対応する．カスプ C_2 の

horospherical 近傍上では図のように f' に対応する．

例 2．図 5 のような $2k(k \geq 3)$ 成分の絡み目 L_k の補空間について理想的多面体分割が W. P. Thurston によって示されている．(図 4 は $k = 6$ のとき) 面角がすべて $\frac{\pi}{2}$ である図のような理想的多面体 Q, R を矢印が合うように面どうしをはり合わせる．図 4 の F_2 と F_2' が同一視されて図 4 の 3 点穴あき球面 S_2 に対応する．V_1, V_2, V_3, V_4 がカスプ C_1' に対応する．W_1, W_2 がカスプ C_3' に対応する [5]．すべてのカスプパラメーターは $\frac{i}{2\cos\frac{\pi}{k}}$ となる．

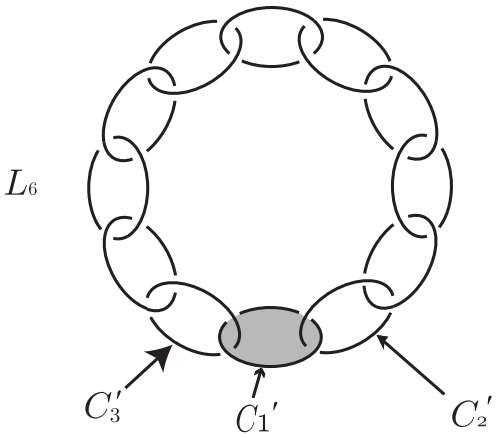

図 5 絡み目 L_6

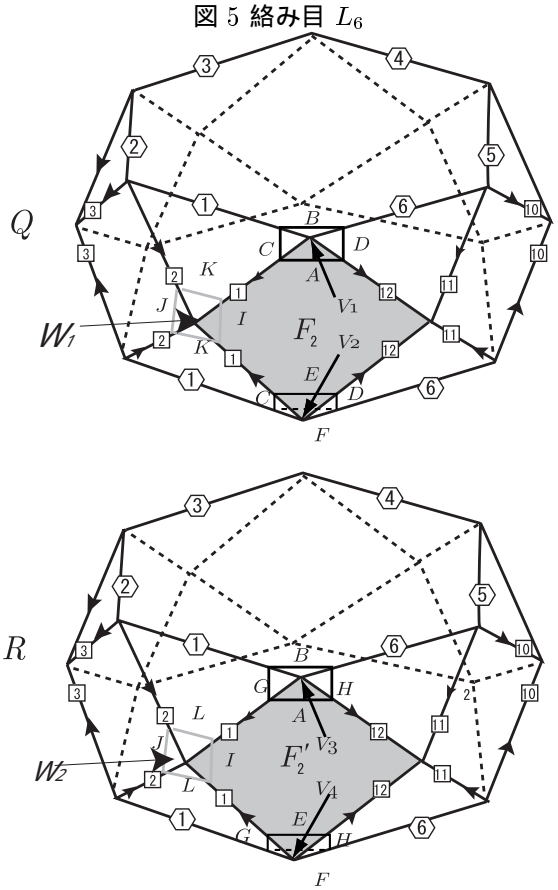

図 6 $S^3\backslash L_k(k \geq 3)$ の理想的多面体分割

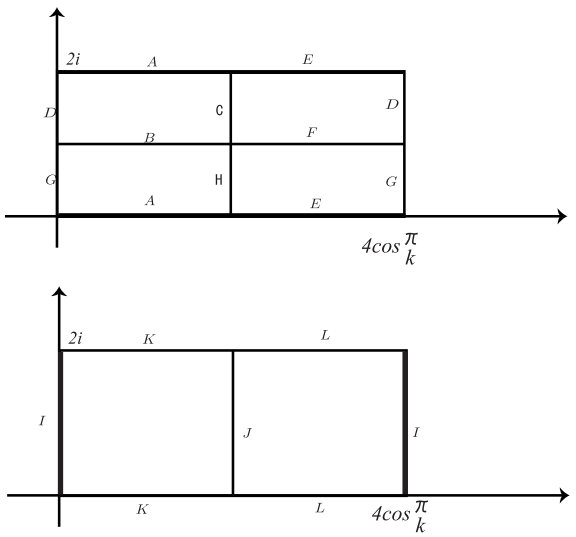

図 7　$S^3\backslash L_k(k \geq 3)$ のカスプパラメーター

注意：3 点穴あき球面 S_2 はカスプ C_1' の horospherical 近傍上では図のように AB に対応する．カスプ C_2' の horospherical 近傍上では図のように I に対応する．

3　主結果の証明

k を十分大きい整数とする．図 5 のような 5 成分の絡み目 L と $2k$ 成分絡み目 L_k を belted sum する．この絡み目の補空間を M_k とおく．

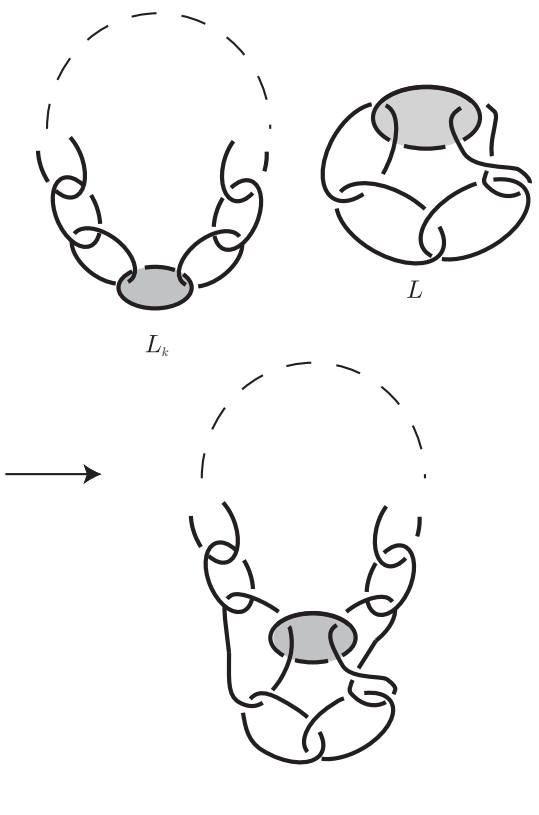

図 8 M_k

$S^3\backslash L$ も $S^3\backslash L_k$ も 向きを変える自己同相写像を持つので，

$$k(s^3\backslash L) = \overline{k(s^3\backslash L)} \tag{3}$$

$$k(s^3\backslash L_k) = \overline{k(s^3\backslash L_k)}. \tag{4}$$

また，定理 2.2 より

$$k(M_k) = k(s^3\backslash L)\ k(s^3\backslash L_k) \tag{5}$$

なので，(3), (4), (5) より

$$k(M_k) = \overline{k(M_k)}$$

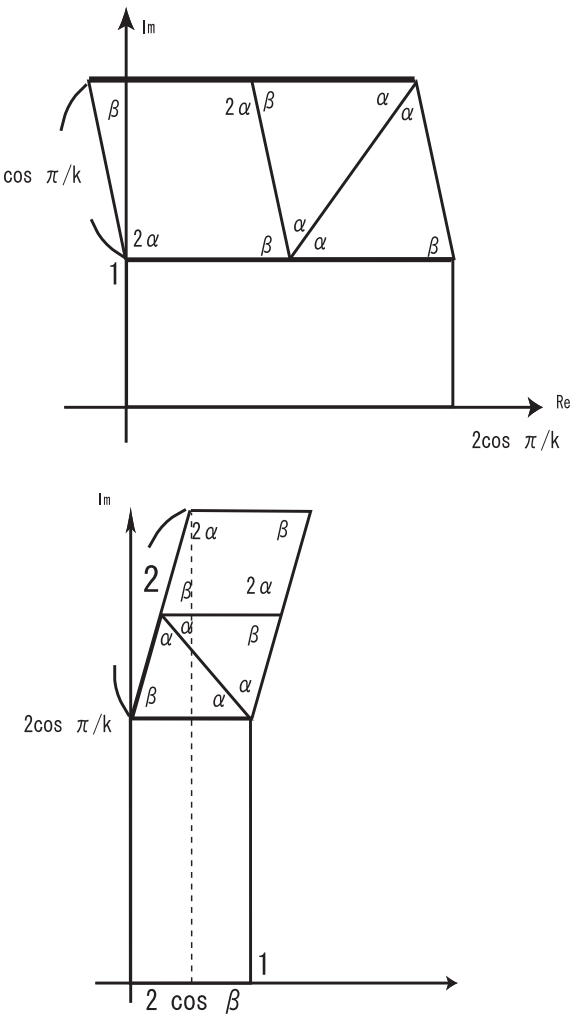

図 9 c_1, c_2 のカスプパラメーター

M_k は $S^3\backslash L$ 内の 3 点穴あき球面 S_1 に沿って切り開き $S^3\backslash L_k$ 内の 3 点穴あき球面 S_2 に沿って切り開いて各々をコピーを張り合わせて得られるので M_k は図 3，4 の理想的多面体 $P,\ Q,\ R$ の面 F_1 を F_2 に F_1' を F_2' に張り合わせることで得られる．図のようにカスプを　c_1, c_2, c_3 とおく．各々のカスプパラメーターを求める．例 1, 2 のように 3 点穴あき球面 $S_1,\ S_2$ はカスプ $C_1,\ C_1'$ 上では a, d, A, E のようにかけるので，belted sum すると $C_1,\ C_1'$ 上で a, d, A, E で切って貼り合わせることになる．c_1 のカスプパラメーターは

$$\frac{-\cos\frac{\pi}{k}\cos\beta + \left(\cos\frac{\pi}{k}\sin\beta + 1\right)i}{2\cos\frac{\pi}{k}} = -\frac{1}{2}e^{-i\beta} + \frac{i}{2\cos\frac{\pi}{k}}.$$

$c_2,\ c_3$ のカスプパラメーターも同様に $f',\ I$ で切って張り合わせると図 5 のようになり，カスプパラメーターを求めることが出来る．

$$2i\cos\frac{\pi}{k} + 2e^{i\beta}.$$

他のカスプのカスプパラメーターは belted sum をしても変わらないので，$z_1 = -\frac{1}{2}e^{-i\beta} + \frac{i}{2\cos\frac{\pi}{k}},\ z_2 = 2\cos\frac{\pi}{k}i + 2e^{i\beta},\ z_3 = -\frac{1}{2}e^{-i\beta},\ z_4 = \frac{i}{2\cos\frac{\pi}{k}}$ とおくと，M_k のカスプパラメーターの集合は

$$\{z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4\}$$

となる．$z,\ z' \in \mathbb{C}$ についてある $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in PGL_2(\mathbb{Q})$ が存在して，$z' = \frac{pz+q}{rz+s}$ とかけるとき，$z \sim z'$ とかく．$z_1 \not\sim -\bar{z}_1$ を示す．$z_1 \sim -\bar{z}_1$ とする．ある $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in PGL_2(\mathbb{Q})$ が存在して，

$$-\overline{z_1} = \frac{pz_1 + q}{rz_1 + s}$$

とする．

$$-r|z_1|^2 - s\overline{z_1} = pz_1 + q. \tag{6}$$

また，$z_1 = -\frac{1}{2}e^{-i\beta} + \frac{i}{2\cos\frac{\pi}{k}}$ より

$$\overline{z_1} = -\frac{1}{2}e^{i\beta} - \frac{i}{2\cos\frac{\pi}{k}}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} |z_1|^2 &= \frac{1}{4}(\cos^2\beta + \sin^2\beta + \frac{2\sin\beta}{\cos\frac{\pi}{k}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{k}}) \\ &= \frac{1}{4}(1 + \frac{2\sin\beta}{\cos\frac{\pi}{k}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{k}}) \end{aligned} \tag{8}$$

なので (6), (7), (8) より

$$\begin{aligned} -\frac{r}{4}(1 + \frac{2\sin\beta}{\cos\frac{\pi}{k}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{k}}) - \frac{s}{2}e^{i\beta} - \frac{is}{2\cos\frac{\pi}{k}} \\ = -\frac{p}{2}e^{-i\beta} + \frac{ip}{2\cos\frac{\pi}{k}} + q \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} -\frac{r}{4}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{k}} + (-\frac{r}{2}\sin\beta + \frac{s}{2}i - \frac{p}{2}i)\frac{1}{\cos\frac{\pi}{k}} \\ -\frac{r}{4} + \frac{s}{2}e^{i\beta} + \frac{p}{2}e^{-i\beta} - q = 0 \end{aligned}$$

$[\mathbb{Q}(\cos\frac{\pi}{k}):\mathbb{Q}] \to \infty (k \to \infty)$ なので k が十分大きいとき，

$$-\frac{r}{4} = 0 \tag{9}$$

$$-\frac{r}{2}\sin\beta + \frac{s}{2}i - \frac{p}{2}i = 0 \tag{10}$$

$$-\frac{r}{4} + \frac{s}{2}e^{i\beta} + \frac{p}{2}e^{-i\beta} - q = 0 \tag{11}$$

(9), (10) より $r = 0$, $p = s$. また，$e^{i\beta} = \frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8} + \frac{i\sqrt{34+10\sqrt{5}}}{8}$ であり，$p, s, q \in \mathbb{Q}$ なので (11) より $p = q = s = 0$. よって $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \notin PGL_2(\mathbb{Q})$. 従って，$z_1 \not\sim -\overline{z_1}$.

$-\overline{z_1} \not\sim z_2$ を示す．$-\overline{z_1} \sim z_2$ とする．ある $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in PGL_2(\mathbb{Q})$ が存在して，

$$-\overline{z_1} = \frac{pz_2 + q}{rz_2 + s}$$

とする．$z_1 = -\frac{1}{2}e^{-i\beta} + \frac{i}{2\cos\frac{\pi}{k}}$, $z_2 = 2\cos\frac{\pi}{k}i + 2e^{i\beta}$, なので

$$\frac{1}{2}e^{i\beta} + \frac{i}{2\cos\frac{\pi}{k}} = \frac{2p(e^{i\beta} + i\cos\frac{\pi}{k}) + q}{2r(e^{i\beta} + i\cos\frac{\pi}{k}) + s}$$

したがって

$$\begin{aligned}(e^{2i\beta} + ie^{i\beta}\cos\frac{\pi}{k})r + \frac{s}{2}e^{i\beta} + \frac{is}{\cos\frac{\pi}{k}} \\ + \frac{2ir(e^{i\beta} + i\cos\frac{\pi}{k})}{\cos\frac{\pi}{k}} \\ = 2pe^{i\beta} + 2qi\cos\frac{\pi}{k} + q\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}(ire^{i\beta} - 2qr)\cos^2\frac{\pi}{k} + (e^{2i\beta} + \frac{se^{i\beta}}{2} - 2r \\ -2pe^{i\beta} - q)\cos\frac{\pi}{k} + is + 2ire^{i\beta} = 0\end{aligned}$$

$-\overline{z_1} \not\sim z_1$ の証明と同様にすれば k が十分大きければ $p = q = r = s = 0$. よって $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \notin PGL_2(\mathbb{Q})$. 従って，$-\overline{z_1} \not\sim z_2$.

$-\overline{z_1} \not\sim z_3$ を示す．ある $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in PGL_2(\mathbb{Q})$ が存在して，

$$\frac{1}{2}e^{i\beta} + \frac{i}{2\cos\frac{\pi}{k}} = \frac{-\frac{p}{2}e^{-i\beta} + q}{-\frac{r}{2}e^{-i\beta} + s}$$

とする．

$$\frac{i}{2\cos\frac{\pi}{k}} = \frac{-\frac{p}{2}e^{-i\beta} + q}{-\frac{r}{2}e^{-i\beta} + s} - \frac{1}{2}e^{i\beta}$$

$\frac{i}{2\cos\frac{\pi}{k}} \in \mathbb{Q}(e^{i\beta})$ となり矛盾．よって $-\overline{z_1} \not\sim z_3$.

同様にすれば $-\overline{z_1} \not\sim z_4$ も示すことが出来る．

よって

$$\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \neq \{-\overline{z_1}, -\overline{z_2}, -\overline{z_3}, -\overline{z_4}\}$$

up to $PSL_2(\mathbb{Q})$ なので定理 2.3 より M_k は commensurably amphicheiral でない．

また，M_k の cusp field は $\mathbb{Q}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mathbb{Q}(e^{i\beta}, i\cos\frac{\pi}{k})$ で，cusp field は commensurability 類の不変量なので $\{M_k\}$ は無限個の commensurability 類を含んでいることが分かる．

参考文献

[1] Adams, C.: Thrice-punctured spheres in the hyperbolic 3-manifolds. Trans. A.M.S., 287, No. 2 1985, 645–656.

[2] Newman, W, Reid, A.: Amalgamation and the invariant trace-field of Kleinian groups. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 109 (1991), 509–515.

[3] Newman, W, Reid, A.: Arithmetic of hyperbolic 3-manifolds O.S.U.math. Reseach Inst.Topology '90 Proceedings of Research seminar in Low Dimensional Topology at Ohio State Univ.(de Gruyter Berlin). (1991)

[4] Thurston, W. P.: The geometry and topoplogy of 3-manifolds Mimemographed lecture notes Princeton Univ., 1977

[5] Yoshida, H.: Invariant trace fields and commensurability of hyperbolic 3-manigfolds, Proceedings of Konts 96 309–318,1997

Invariant trace fields and commensurably amphicheiralities of hyperbolic 3-manifolds

Han Yoshida

Let M be a hyperbolic 3-manifold and $k(M)$ the invariant trace field of M. It is known that that if M is commensurably amphicheirable, then $k(M) = \overline{k(M)}$, where $\overline{k(M)}$ is the complex conjugate of $k(M)$. In this paper, we show that the reverse is not true in general. We construct commensurably non amphicheirable hyperbolic 3-manifolds $M_k (k = 3, 4, \cdots)$ and show that $k(M_k) = \overline{k(M_k)}$. We also show that this set containes infinitely many commensurability classes.