[一般教科自然・吉田研究室]

吉田はん　准教授　博士（理学）

[専門分野]低次元トポロジー

[担当授業]数学AI, AII, 数学B, 線型代数学II

副題「3次元多様体の双曲構造」

1．序

昨年、ポアンカレ予想についてNHKが「100年の難問はなぜ解けたのか　～天才数学者　失踪の謎～」という番組を放送していました。100年以上も前にフランス人の数学者アンリポアンカレが提起した問題「基本群が自明な三次元多様体は三次元球面のみか？」に多くの数学者が取り組みました。その中の一人ウィリアムサーストンはポアンカレ予想を含む幾何化予想という3次元多様体をユークリッド構造や双曲構造などの8つの幾何構造を持つ部分に分解すると予想しました。最近この幾何化予想を含む形でグレゴリーペレルマンがポアンカレ予想を解決しました。このキーとなっている幾何構造の1つの双曲構造が私が研究しているものです。以下でいくつかの用語について説明していきます。

2．多様体

いくらでも伸び縮みができるゴムで出来ている図形を考えます。一方から他方へ伸ばしたり、縮めたり、曲げたり、歪めたりして重ねられる3つの図形は同じものであると考えます。すなわち円盤も四角形も三角形も同じものとみなします。この二つの図形は同相であるといいます。何枚かの円盤と同相なもののふちを張り合わせてできたもの（球面やドーナツの表面、クラインの壷などの曲面）を2次元多様体という。いくつかの球体と同相なもののふちを張りあわせて出来るものを3次元多様体という。たとえば3次元空間から閉曲線を取り除いたものなどが3次元多様体になります。

3．胞体分割

多様体というのは3次元空間内で目に見えるものばかりではありません。そこで多様体を理解するため

に胞体分割という手法を取り入れます。２次元多様体であれば、いくつかの多角形の辺と辺を張り合わせて作ろうというものです。図１のように２枚の四角形を張り合わせると球面と同相なものになります。図２のように四角形の辺と辺を張り合わせるとドーナツの表面ができます。同じ四角形でも張り合わせ方を変えるとクラインの壺という３次元空間内では実現できないようなものになります（図３）。

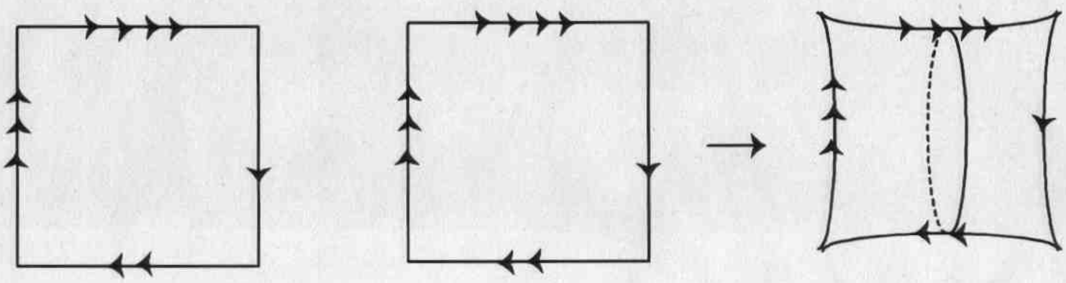

図１．球面の胞体分割

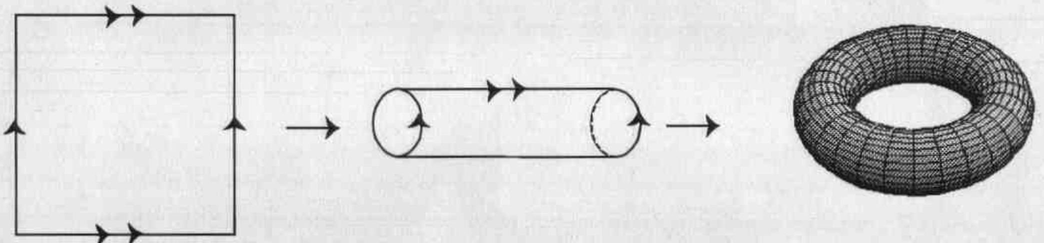

図2ドーナツの表面の胞体分割

図２．ドーナツの表面の胞体分割

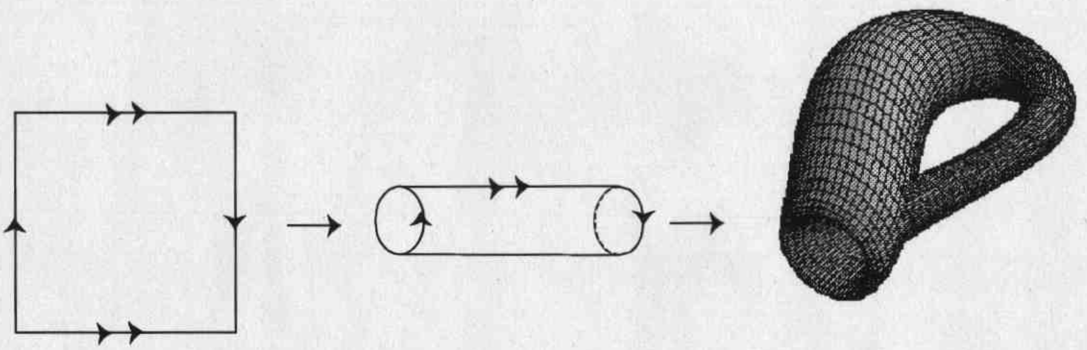

図３クラインの壺の胞体分割

球面の胞体分割のとり方はたくさんあります。しかし、頂点の数－辺の数+面の数は常に２です。これは

オイラー標数といわれるもので、ドーナツの表面のオイラー標数は0となり、曲面の特徴づけるものとなっています。

4. 双曲構造

xy平面でyが正の部分（上半平面）に双曲計量という目盛りを入れます。詳しい式は書きませんが、上半平面内の2点A、Bを結ぶ最短線とは、この2点を通り、x軸に直交する円または直線になります。これは通常のユークリッド空間での直線に対応します。また、x軸に近づくほど見た目の距離より長くなり、図に示した三角形はすべて合同ですが、境界に近づくほど、見た目が小さくなっています。y軸上の点でy座標が$1/e$から$1/e^2$までの長さ、1から$1/e$までの長さ、1からeまでの長さがすべて1になります（図4）。

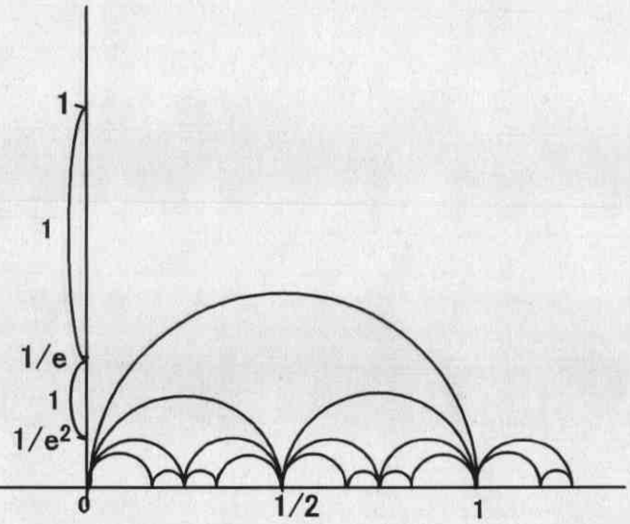

図 4

図5のような頂点が境界上にあるような3角形（頂点を含まない）を2枚張り合わせると球面から3点を除いたような2次元多様体になります。

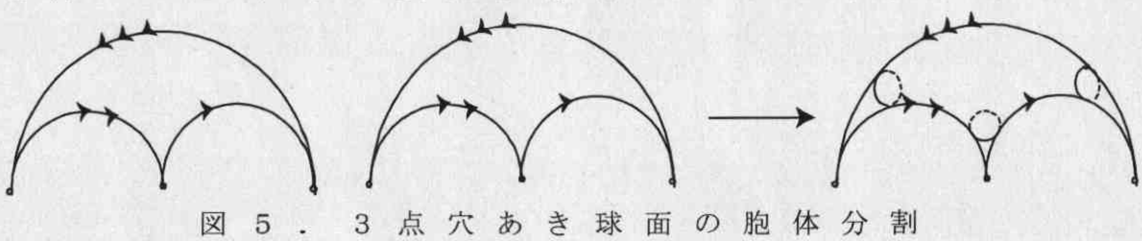

図5. 3点穴あき球面の胞体分割

同相というのが伸ばしたり縮めたりして同じ形にな

るものというのに、このような計量を考えるのは不思議に思われるかもしれませんが、(少し条件がつけると)この計量から計算される面積はg人乗りの浮き輪の場合は$4\pi(g-1)$になるなど密接な関係があります。

次元をあげて3次元上半空間に双曲計量という目盛りを入れます。このとき境界に直交するような球面が、ユークリッド空間での平面に対応します。以下測地面といいます。

有限個の測地面で囲まれている部分を双曲的多面体といいます。特に頂点が境界上にあるものを理想的多面体といいます。見にくいのですが図6のように矢印が合うように、理想的八面体の面と面を張り合わせるとホワイトヘッド絡み目という二つの閉曲線の補空間が得られます。別の理想的多面体を張り合わせてこの3次元多様体を作ることは可能ですが、3次元双曲的多様体に対して胞体分割の仕方を一意的に指定する方法があります。ベルト和という2つの3次元多様体M_1、M_2から新しく3次元多様体Mを作ったときM, M_1, M_2の各々の標準的胞体分割の関係を調べて、symmetry群への応用などを試みています。

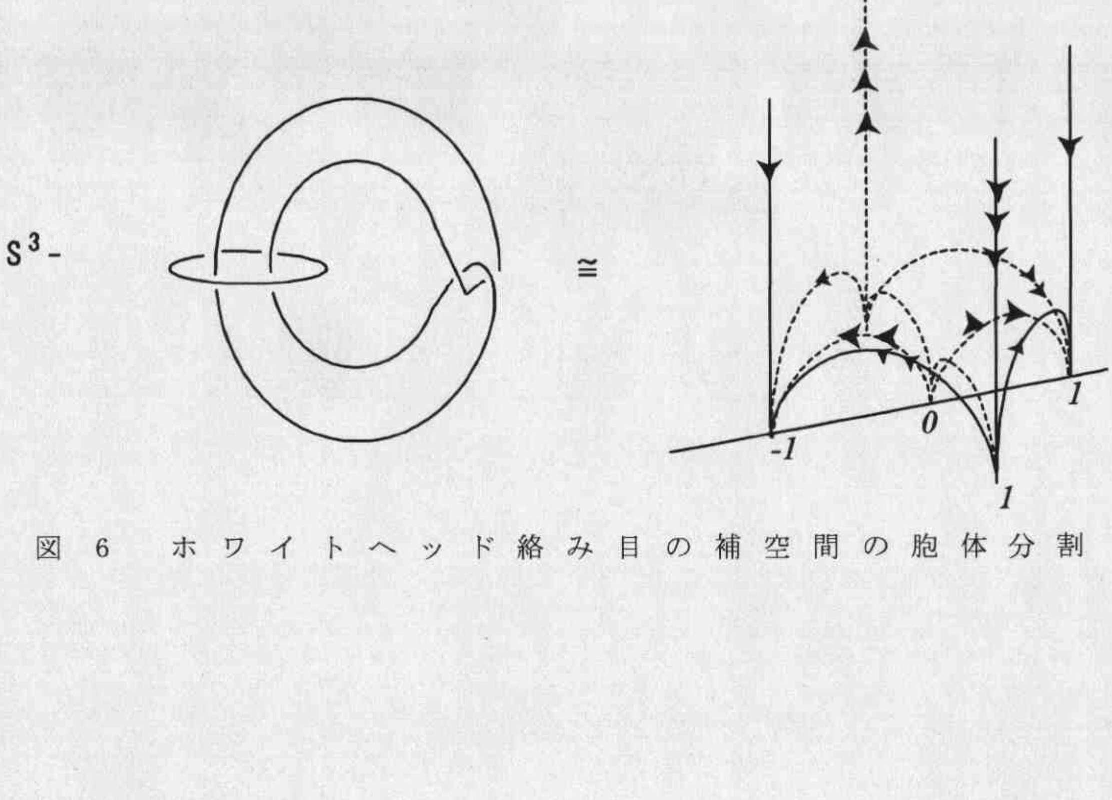

図6　ホワイトヘッド絡み目の補空間の胞体分割