【一般教科(自然)】

吉田はん　講師・博士(理学)

[専門分野] 位相数学

[担当授業] 数学ＡⅠ，Ⅱ，応用数学Ⅰ，線形代数学

私の研究では双曲３次元多様体というものを扱っている。これについて出来るだけわかりやすい言葉で書いてみた。

１．同相

２つの図形がいくらでも伸び縮みできて切れないゴムで出来ていると考えて片方の図形からもう一方の図形に移るときに同相ということにする。(厳密には違うのだが直感的に理解してもらうためにこのように書く。) すなわち、相似な図形は同相であり、さらに円盤も四角形も三角形も同じもの、同相な図形として扱う。

２．多様体

普段、私たちが利用する地図は長方形（円盤と同相なもの）の領域に書かれたものである。本当は地球は球体であるが、地球儀を利用することはめったにない。球面は、いくつかの円盤と同相なものの縁を張り合わせて出来たものとみなせる。このように、円盤と同相なものをいくつか張り合わせて出来た図形を２次元多様体という．直感的には途中で分岐したり他の面と交わったりしない曲面のことである。例えば球面、ドーナツの表面（トーラスと言う）、２人乗りの浮き輪（図.2)、３人乗りの浮き輪 (実際にあるかどうかは知らない) …などである。

３．２次元多様体の双曲構造

図１のように長方形を用意して向かい合った辺通しを同一視する (張り合わせる) とトーラスが出来る。今度は図２のように８角形から２人乗りの浮き輪を構成してみる。トーラスの場合は辺を同一視すると頂点が１つになり、この頂点の周りでは角度が 360 度になる。２人乗りの浮き輪の場合、８角形の辺を同一視するとやはり頂点が１つになるがこの頂点のまわりでは角度が 1080 度になってしまう。今までとは違った角度や距離（双曲構造）について考えてみる。複素平面上の原点を中心とする半径１の円 D を考える。この D 内の２点 z_1, z_2 を結ぶ曲線 $c(t)(c(0)=z_1, c(1)=z_2)$ の長さを $\int_0^1 \frac{2|\dot{c}(t)|}{1-|c(t)|^2}dt$ とおく。このとき、この２点を結ぶ最短線は図 3.1 のようになる。これを測地線という。普通扱っているユークリッド幾何の直線にあたるものである。測地線通しの交わる角度は各々の接線の角度とする。図 3.2 のような正８角形を用意して先ほどと同じように辺を同一視する。ただし同一視する測地線上で距離が一致するものとする。このとき頂点の周りでは 360 度になる。今は正８角形を用いたが, 実際には他の８角形でも同様に２人乗りの浮き輪ができる。いろいろな８角形のとり方があるが、常に面積は 4π である。一般に $g(\geq 2)$ 人乗りの浮き輪について同様に構成すると、面積は $4\pi(g-1)$ となる。

４．３次元多様体

２次元多様体と同様に３次元多様体もいくつかの３次元球体を張り合わせたものである。具体的な例としては、３次元空間から閉曲線を取り除いたものなどがある。基本的な問題「与えられた３次元多様体が同相かどうか判定せよ」ということを考える。先と同様に３次元多様体にも双曲構造も考えることができる。２次元多様体の時には何通りもの双曲構造の入れ方があったが、１つの３次元多様体の完備有限体積な双曲構造の入れ方は一通りである。すなわち与えられた２つの３次元多様体に完備有限体積な双曲構造をいれて、体積が異なれば、異なる３次元多様体と判定できる。体積が同じになる双曲３次元多様体は有限個しかないほど強力な判定が出来るが、いつ同じ体積になるかなど、わかっていないことが多く、きわめて興味深い対象となっている。現在、私は３次元空間内の閉曲線と体積の関係などを研究している。

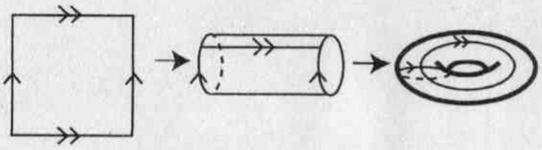

図１

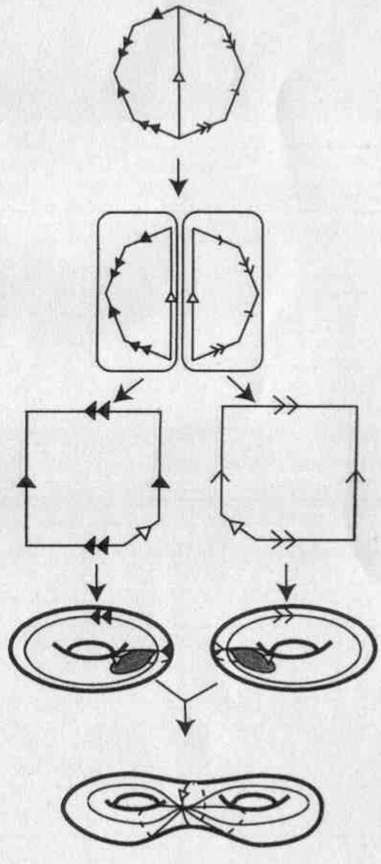

図２．２人乗りの浮き輪

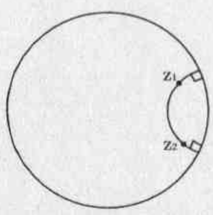

図3.1　測地線

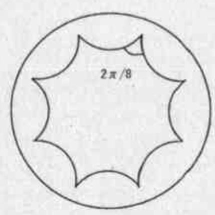

図3.2　正八角形